8 – Дәріс

<u>Тақырыбы</u>: Функцияның туындысы. Біржақты туындылар. Элементар функциялардың туындылары.

Туынды

f функциясы x_0 нүктесінде және оның қандайда бір маңайында анықталған функция болсын. x_0 - нүктесіндегі аргумент өсімшесі $\Delta x = x - x_0$, ал оған сәйкес келетін функция өсімшесі:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

арқылы белгіленсін.

Анықтама. *Егер* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *нақты мәнді шегі бар болса, онда шектің мәнін* $y = f(x)$ ***функциясының*** x_0 ***- нүктесіндегі туындысы*** *дейді де*

$$y'(x_0), \quad f'(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \frac{dy(x_0)}{dx}$$

символдарының бірімен белгіленеді.

Сонымен,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

немесе

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Егер (1) - шек $+\infty, -\infty$ немесе ∞ болса, онда f функциясының x_0 - нүктесінде **ақырсыз туындысы бар** дейді.

Егер (1) - теңдіктегі шек $\Delta x \to 0, \Delta x > 0$ немесе $x \to x_0, x > x_0$ жағдайында қарастырылса, онда шек (егер ол бар болса) f функциясының x_0 нүктесіндегі **оң жақты туындысы**, ал $\Delta x \to 0, \Delta x < 0$ немесе $x \to x_0, x < x_0$ жағдайында қарастырылса, онда **сол жақты туындысы** деп аталады да, олар сәйкес $f_0'(x_0), \ f_c'(x_0)$ символдары арқылы белгіленеді.

Функцияның x_0 нүктесінде туындысы бар болуы үшін:

1) $\exists f_0'(x_0), \ \exists f_c'(x_0)$; 2) $f_0'(x_0) = f_c'(x_0)$ шарттарының орындалуы қажетті және жеткілікті. Онда

$$f_0'(x_0) = f_c'(x_0) = f'(x_0). \tag{2}$$

Теорема. Егер $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде ақырлы туындысы бар болса, онда f функциясы осы x_0 - нүктесінде үзіліссіз болады.

Ескерту. Функция нүктеде үзіліссіз болса да, оның бір жақты ақырлы туындылары болмауы да мүмкін. Мысал ретінде мынадай функцияны қарастырайық:

$$f(x) = x^{2/3}, \quad f_0'(0) = +\infty, \quad f_c'(0) = -\infty$$

Сонымен, функция нүктеде үзіліссіз болғанымен, ол нүктеде функцияның туындысы болмауы мүмкін екен.

Салдар. Егер x_0 нүктесі f функциясының үзіліс нүктесі болса, онда осы нүктеде f - тің ақырлы туындысы болмайды.

Негізгі элементар функциялардың туындыларының кестесі:

1. $c' = 0$;
2. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x' = 1; \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \quad a > 0, a \neq 1, \quad \left(e^x\right)' = e^x$;
4. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, a \neq 1, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$;
5. $(\sin x)' = \cos x$;
6. $(\cos x)' = -\sin x$;
7. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
8. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$;
12. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$;
13. $(shx)' = chx$;
14. $(chx)' = shx$;
15. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$;
16. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$;